LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

ANO LECTIVO 2012 /2013

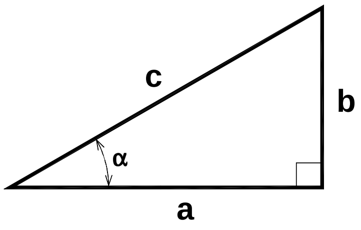
APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

01

REVISÕES: GEOMETRIA E VECTORES

ISABEL ALVIM TELES

1- Triângulo-rectângulo



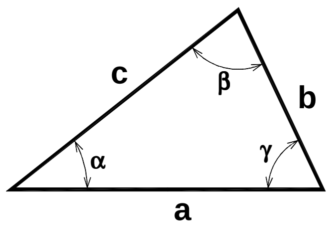
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = c \cos\alpha$$

$$b = c \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}}$$

2- Outros triângulos



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

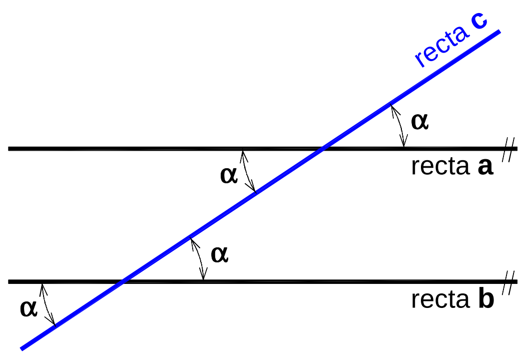
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta}$$

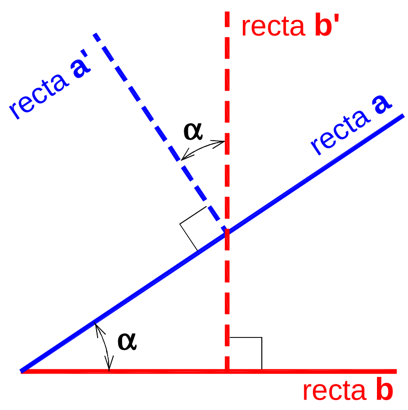
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

3- Geometria



recta **a** // recta **b** $\Rightarrow$ todos os ângulos são **α**

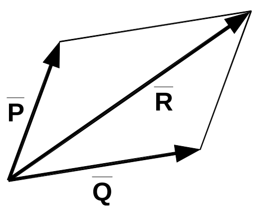


ângulo **α** : ângulo entre recta **a** e recta **b**

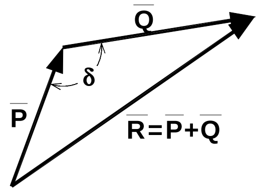
Se: recta **a’** ⊥ recta **a** e recta **b’** ⊥ recta **b**

Então: ângulo entre recta **a’** e recta **b’** $\Rightarrow$ ângulo **α**

4- Adição de dois vectores



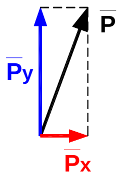
ou

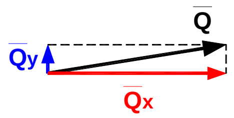


$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$$

norma do vector (grandeza do vector):

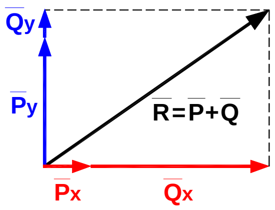
$$|R| = \sqrt{|P|^2 + |Q|^2 - 2.|P|.|Q|.\cos\delta}$$

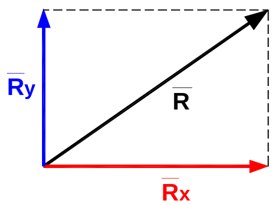




$$\overline{P} = \overline{P}x + \overline{P}y$$

$$\overline{Q} = \overline{Q}x + \overline{Q}y$$

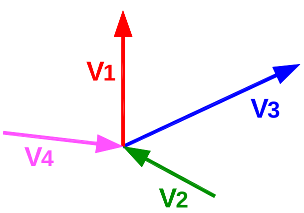


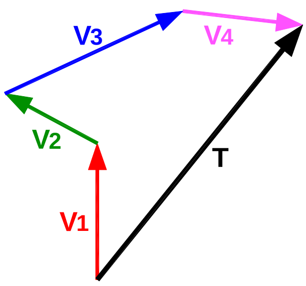


$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{R}x = \overline{P}x + \overline{Q}x \\ \overline{R}y = \overline{P}y + \overline{Q}y \end{cases}$$

$$|\overline{R}| = \sqrt{|\overline{R}x|^2 + |\overline{R}y|^2}$$

5- Adição de vários vectores





$$T = V1 + V2 + V3 + V4$$

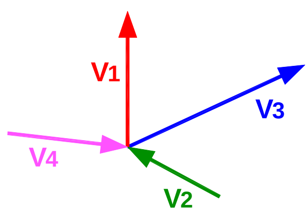
$$\begin{cases} T_x = \sum V_x = V1_x + V2_x + V3_x + V4_x \\ T_y = \sum V_y = V1_y + V2_y + V3_y + V4_y \end{cases}$$

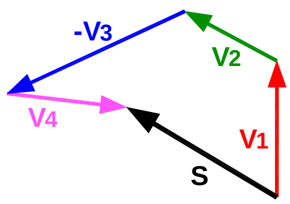
$$|T| = \sqrt{|T_x|^2 + |T_y|^2}$$

6- Subtracção de vectores

Subtrair um vector $\Rightarrow$ adicionar esse vector com o sentido contrário

Ex: **S** = V1 + V2 – V3 + V4 = V1 + V2 + (-V3) + V4



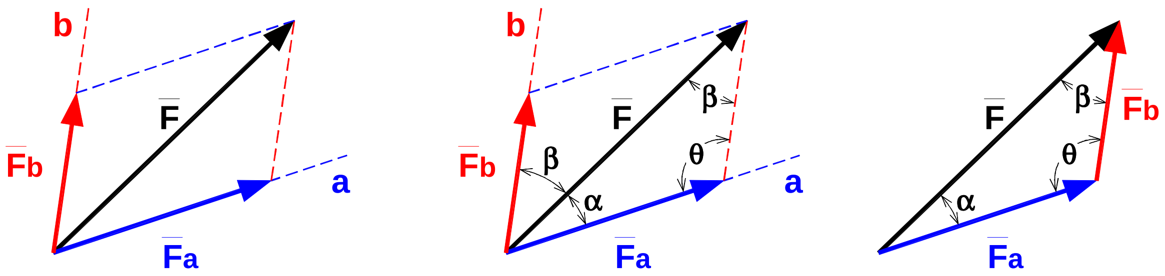


$$S = V1 + V2 - V3 + V4$$

$$\begin{cases} S_x = \sum V_x = V1_x + V2_x - V3_x + V4_x \\ S_y = \sum V_y = V1_y + V2_y - V3_y + V4_y \end{cases}$$

$$|S| = \sqrt{|S_x|^2 + |S_y|^2}$$

7- Decomposição de vector segundo duas direcções (a e b)

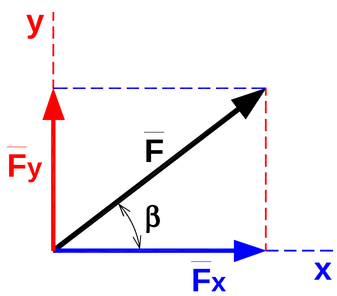


$$\overline{F} = \overline{F}a + \overline{F}b$$

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\frac{\left|\overline{F}\right|}{\text{sen } \theta} = \frac{\left|\overline{F}a\right|}{\text{sen } \beta} = \frac{\left|\overline{F}b\right|}{\text{sen } \alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left|\overline{F}a\right| = \dfrac{\left|\overline{F}\right|}{\text{sen } \theta} \text{sen } \beta \\ \left|\overline{F}b\right| = \dfrac{\left|\overline{F}\right|}{\text{sen } \theta} \text{sen } \alpha \end{cases}$$

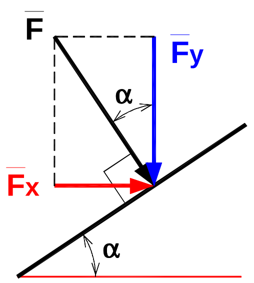
8- Decomposição de vector segundo duas direcções perpendiculares (x e y)



$$\overline{F} = \overline{F}x + \overline{F}y \qquad \begin{cases} \overline{F}x = \overline{F} \cos\beta \\ \overline{F}y = \overline{F} \text{ sen}\beta \end{cases}$$

norma do vector (grandeza do vector):

$$\left|\overline{F}\right| = \sqrt{\left|\overline{F}x\right|^2 + \left|\overline{F}y\right|^2}$$



$$\overline{F} = \overline{F}x + \overline{F}y \qquad \begin{cases} \overline{F}x = \overline{F} \text{ sen}\alpha \\ \overline{F}y = \overline{F} \cos\alpha \end{cases}$$

norma do vector (grandeza do vector):

$$\left|\overline{F}\right| = \sqrt{\left|\overline{F}x\right|^2 + \left|\overline{F}y\right|^2}$$

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

ANO LECTIVO 2012 /2013

APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

02

INTRODUÇÃO À ESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

1- ESTÁTICA

A Estática é uma área da Mecânica dos corpos rígidos que estuda o equilíbrio dos corpos em repouso ou em movimento com velocidade constante.

MECÂNICA
- Mecânica dos corpos rígidos
  - Estática
  - Dinâmica
- Mecânica dos corpos deformáveis
- Mecânica dos fluidos

A Mecânica é a ciência que estuda o efeito de sistemas de forças a actuar em corpos em repouso ou em movimento.

2- CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1. Espaço

O conceito de *espaço* está associado à noção da posição de um ponto P.

Qualquer posição pode ser definida através de três coordenadas num determinado referencial. Essas coordenadas são as distâncias do ponto aos eixos do referencial.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), as distâncias, sendo comprimentos, estão medidas em ***metros*** (***m***) ou qualquer dos seus múltiplos ou submúltiplos (ex: ***km***, ***cm***, ***mm***, etc.).

2.2. Tempo

Na Estática o conceito *tempo* não intervém. No entanto é fundamental no estudo da Dinâmica.

A unidade de *tempo* do SI é o ***segundo*** (***s***).

2.3. Massa

A *massa* é uma propriedade da matéria que pode ser utilizada para comparar corpos.

A unidade de *massa* do SI é o ***quilograma*** (***kg***).

2.4. Força

Uma *força* representa a acção de um corpo sobre outro. Esta pode ser exercida por contacto directo ou à distância (ex: forças da gravidade, forças magnéticas, etc.)

Uma força pode ser representada por um vector, sendo caracterizada por:

- ponto de aplicação
- intensidade (grandeza)
- direcção
- sentido

A unidade de *força* do SI é o ***Newton*** (***N***) ou os seus múltiplos, cujos mais utilizados são:

kN (quilonewton) 1 kN = 1 000 N

MN (meganewton) 1 MN = 1 000 kN = 1 000 000 N

2.5. Ponto material

A noção de *ponto material* é uma *idealização*, ou seja, é uma simplificação da realidade que vai facilitar a compreensão e resolução de problemas.

Consideramos que um *ponto material* não tem dimensões, ou antes, as suas dimensões são desprezáveis na análise de determinados fenómenos (ex: o tamanho da Terra é insignificante quando comparado com as dimensões do sistema solar, pelo que a Terra pode ser modelada por um ponto ao estudar o seu movimento orbital).

2.6. Corpo rígido

Um corpo rígido é um conjunto de partículas que mantêm distâncias fixas entre si, tanto antes como depois da aplicação de cargas.

Exemplo: Ao corpo ABCD foram aplicadas duas forças conforme representado nas *figuras 1* e *2*.

Na *figura 1* o corpo deslocou-se mas manteve a sua forma inicial. As distâncias entre quaisquer dois pontos permaneceram iguais.

Na *figura 2*, o corpo ABCD apresenta deformações que alteram as distâncias entre dois pontos.

Conclusão: O corpo ABCD da *figura 1* é um corpo rígido. O corpo ABCD da *figura 2* não é um corpo rígido.

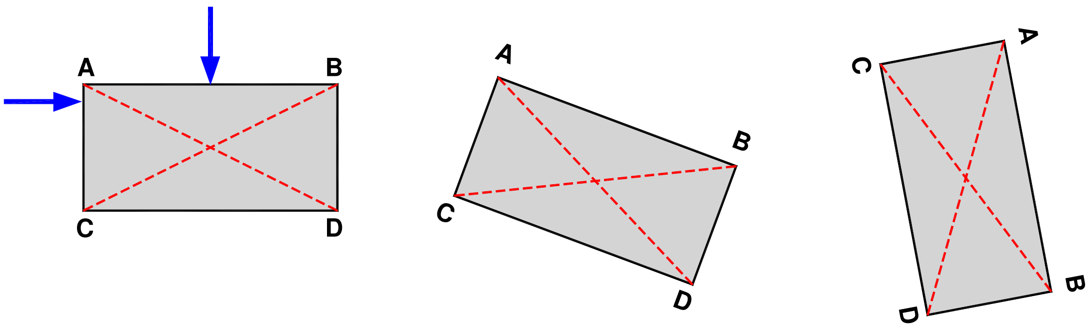


Figura 1 – Corpo rígido

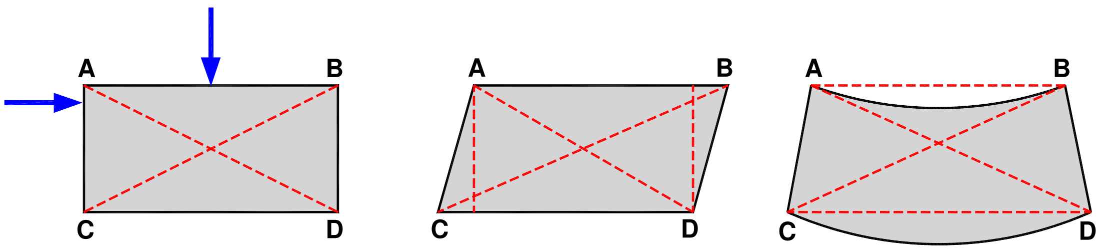


Figura 2 – Corpo deformável

3- PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

3.1. As três leis fundamentais de Newton

Primeira Lei: Se a resultante das forças que actuam num corpo é nula, o corpo permanecerá em repouso (se estava inicialmente em repouso) ou mover-se-á com velocidade constante segundo uma linha recta (se estava inicialmente em movimento).

Exemplo: Quando um autocarro arranca, os passageiros que estavam em repouso tendem a manter-se assim, pelo que a parte do corpo que não está directamente ligada ao autocarro "fica para trás" (*figura 3*).

Quando um autocarro que se encontrava em movimento pára subitamente, os passageiros tendem a manter o movimento que tinham anteriormente (*figura 4*).

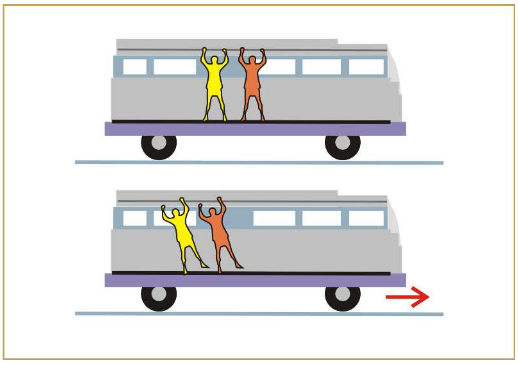


Figura 3

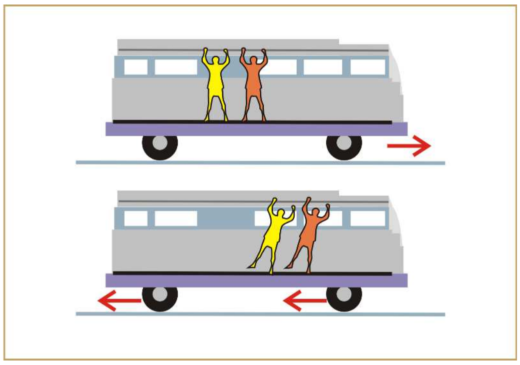


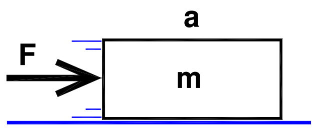
Figura 4

(fonte: osfundamentosdafisica.blogspot.com)

Segunda Lei: Se a resultante das forças que actuam num corpo não é nula, este terá uma aceleração cuja intensidade é proporcional à intensidade da resultante, com a mesma direcção e o mesmo sentido.

$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{m} \,.\, a}$

onde: **F** – força resultante que actua no corpo
m – massa do corpo
a – aceleração do corpo



Exemplo: Quando se aplica a mesma força **F** a três corpos com massas diferentes (**m**, **2m** e **3m**), a aceleração induzida decresce proporcionalmente (*figura 5*).

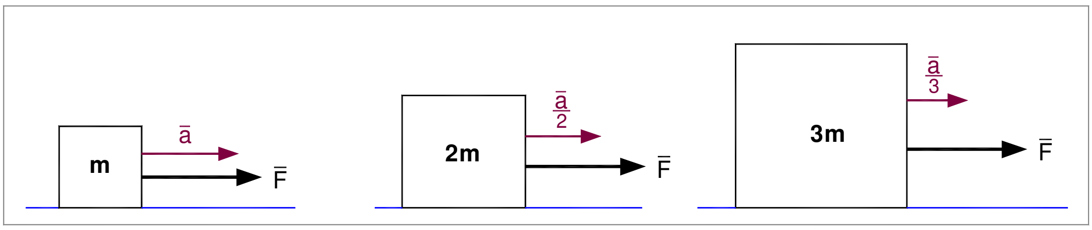


Figura 5

<u>Relação entre **massa** de um corpo e **força da gravidade** exercida sobre esse corpo na Terra</u>

(aceleração da gravidade = 9,81 m/s^2)

F = m . a

F = 1 kg x 9,81 m/s^2 = 9,81 N $\Rightarrow$ 1 kg $\leftrightarrow$ 9, 81 N ($\approx$10 N)

Terceira Lei: As forças de acção e reacção entre corpos em contacto têm a mesma intensidade, a mesma linha de acção e sentidos opostos.

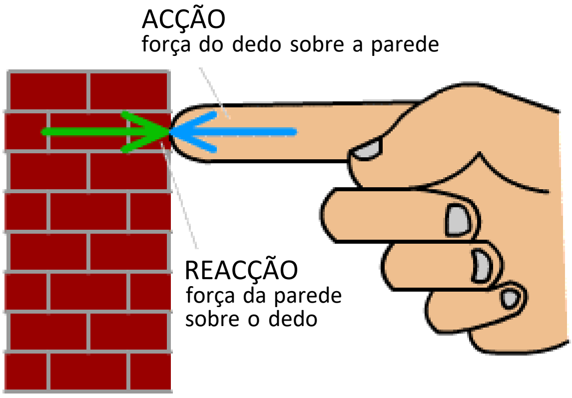


Figura 6

(adaptado de: physics.stackexchange.com)

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

ANO LECTIVO 2012 /2013

APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

03

ESTÁTICA DO PONTO MATERIAL

ISABEL ALVIM TELES

1- SISTEMAS DE FORÇAS A ACTUAR NUM PONTO MATERIAL

Como por definição um *ponto material* não tem dimensões, ou antes, as suas dimensões são desprezáveis na análise de determinados fenómenos, qualquer sistema aí a actuar será um sistema de forças concorrente.

Um sistema de forças a actuar num ponto poderá ser substituído pela sua **resultante**.

A **resultante** de um sistema de forças a actuar num ponto é a força correspondente à soma de todas as forças do sistema. Sendo as forças grandezas vectoriais, a resultante corresponde à soma vectorial de todas as forças que constituem o sistema.

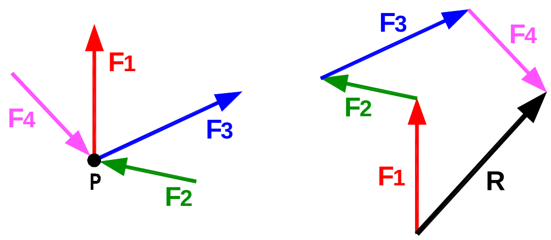


Figura 1

O sistema de forças representado na *Figura 1*, constituído pelas forças F1, F2, F3 e F4, poderá ser substituído pela força resultante **R**.

2- SISTEMAS DE FORÇAS EQUIVALENTES

Um sistema de forças a actuar num ponto poderá ser substituído por outro sistema de forças equivalente.

Dois sistemas de forças a actuar num ponto dizem-se equivalentes se tiverem a mesma **resultante**.

Exemplo: Considere os sistemas de forças a actuar no ponto **P** representados na *Figura 2*.

O sistema de forças constituído por **F1**, **F2**, **F3** e **F4** é equivalente ao sistema de forças constituído por **Q1**, **Q2** e **Q3** pois a resultante **R** de ambos os sistemas apresenta a mesma intensidade, direcção e sentido (ver *Figura 3*).

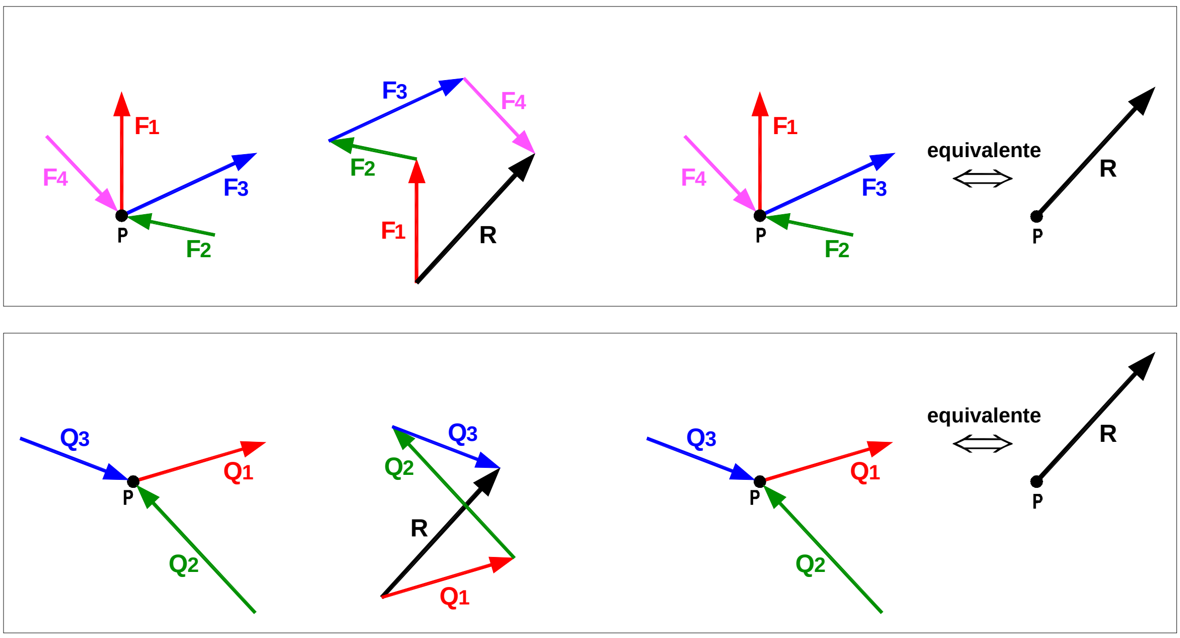


Figura 2

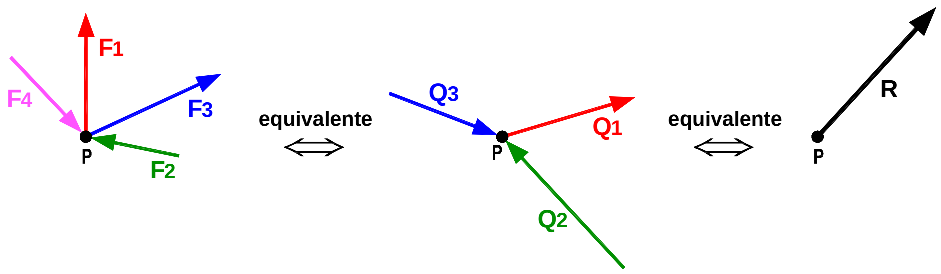


Figura 3

Resultante do <u>sistema de forças **F**</u> $\Rightarrow$ $\overline{R}_F \begin{cases} \overline{R}_{F_X} = \sum F_X \\ \overline{R}_{F_Y} = \sum F_Y \end{cases}$

Resultante do <u>sistema de forças **Q**</u> $\Rightarrow$ $\overline{R}_Q \begin{cases} \overline{R}_{Q_X} = \sum Q_X \\ \overline{R}_{Q_Y} = \sum Q_Y \end{cases}$

Se o <u>sistema de forças **F**</u> é equivalente ao <u>sistema de forças **Q**</u>:

$$\boxed{\overline{R}_F = \overline{R}_Q \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_X = \sum Q_X \\ \sum F_Y = \sum Q_Y \end{cases}}$$

3- <u>CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE UM PONTO MATERIAL</u>

Consideremos um ponto material em repouso a que vamos aplicar um sistema de forças. Após a aplicação das forças, o ponto material está em equilíbrio se se mantiver em repouso.

Consideremos agora um ponto material em movimento com velocidade constante a que vamos aplicar um sistema de forças. Após a aplicação das forças, o ponto material está em equilíbrio se mantiver o mesmo movimento com velocidade constante.

Quando a resultante de um sistema de forças a actuar num ponto material é zero, o ponto está em equilíbrio.

Condição de equilíbrio de um ponto material: $\mathbf{R = 0} \quad \Rightarrow \quad \sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \end{cases}$

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

ANO LECTIVO 2012 /2013

APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

04

ESTÁTICA DO CORPO RÍGIDO

ISABEL ALVIM TELES

1- FORÇAS A ACTUAR NUM CORPO RÍGIDO

As forças a actuar num corpo rígido podem ser classificadas da seguinte forma:

- Forças exteriores
  - Acções
  - Reacções
- Forças interiores

As **forças exteriores** representam a acção de outros corpos sobre o corpo em estudo.

As forças exteriores dividem-se em acções e reacções. As acções são as forças que tendem a fazer mover o corpo. As reacções são as forças que impedem determinados movimentos do corpo.

As **forças interiores** são aquelas que mantêm o corpo coeso, assegurando a ligação das várias partes que o constituem.

2- PRINCÍPIO DA TRANSMISSIBILIDADE

O movimento do corpo rígido devido à aplicação da **força F** é independente do seu ponto de aplicação, desde que este esteja sob a linha de acção da força (ver *Figura 1*), ou seja, a **força F** poderá ser considerada um vector deslizante.

A **força F** aplicada ao corpo rígido no ponto **A** terá o mesmo efeito que a **força F** aplicada em **B** ou em **C**, pois os pontos de aplicação **A**, **B** e **C** pertencem à linha de acção da **força F**.

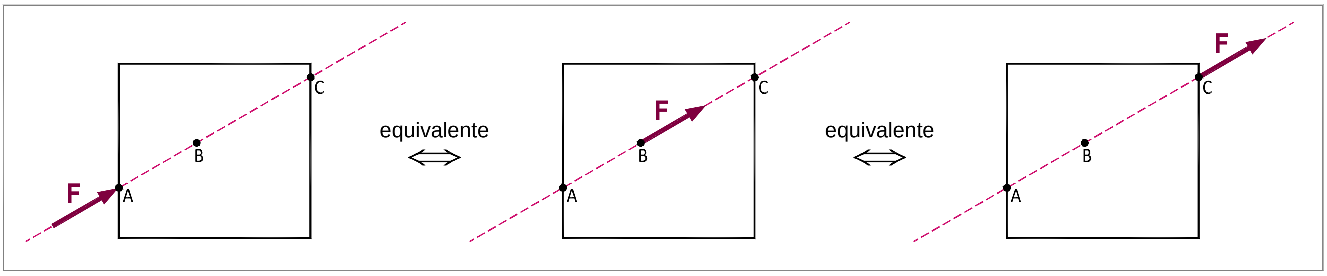


Figura 1

Forças que respeitem o **Princípio da Transmissibilidade** são consideradas forças equivalentes.

Exemplo: Considere a viatura representada na *Figura 2*. É indiferente para o estudo do movimento da viatura se ela está a ser empurrada ou puxada. Se as forças $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ têm a mesma grandeza, direcção e sentido e os seus pontos de aplicação estão posicionados sob a sua linha de acção, então a força $\mathbf{F_1}$ poderá ser substituída pela $\mathbf{F_2}$ porque o seu efeito é o mesmo.

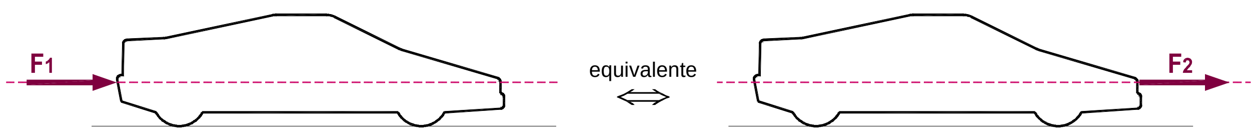


Figura 2

O **Princípio da Transmissibilidade** só é válido no estudo do equilíbrio externo de um corpo rígido, não podendo ser aplicado no estudo dos esforços internos de um corpo rígido. Exemplo: a força $\mathbf{F_1}$ provoca uma compressão no pára-choques traseiro, enquanto a força $\mathbf{F_2}$ provoca uma tracção no pára-choques dianteiro.

3- GRAU DE LIBERDADE

Um corpo considerado livre no espaço tridimensional pode ter movimento de translação e/ou de rotação em relação aos três eixos coordenados (ver *Figura 3*). Um corpo no espaço tridimensional tem seis graus de liberdade.

Grau de liberdade é o número mínimo de parâmetros que são necessários para se definir a posição de um corpo no espaço.

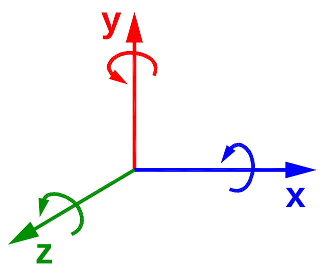


Figura 3

Um corpo que só se possa deslocar num plano possui três graus de liberdade (ver *Figura 4*). Qualquer variação de posição poderá ser totalmente definida por duas translações e uma rotação. Na *Figura 4*, a posição final do corpo fica totalmente definida se soubermos o deslocamento horizontal **dx**, o deslocamento vertical **dy** e a rotação **rz** em torno do eixo Z.

Os graus de liberdade correspondem aos movimentos permitidos.

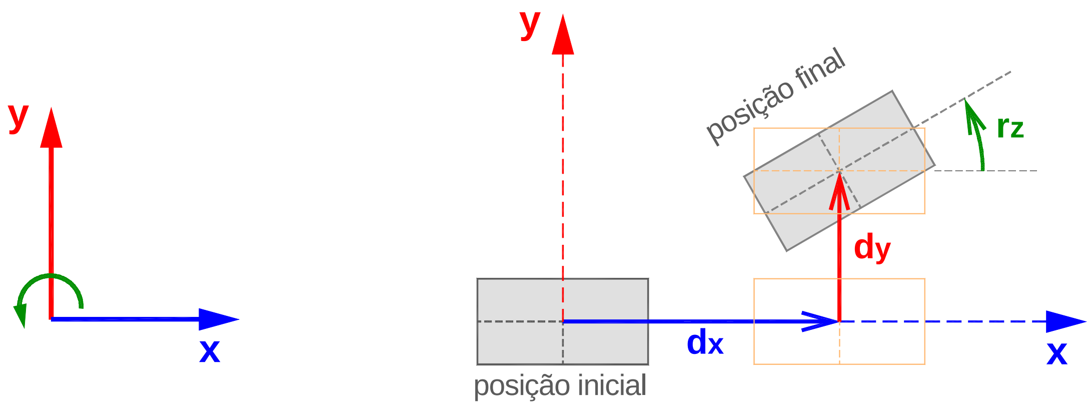
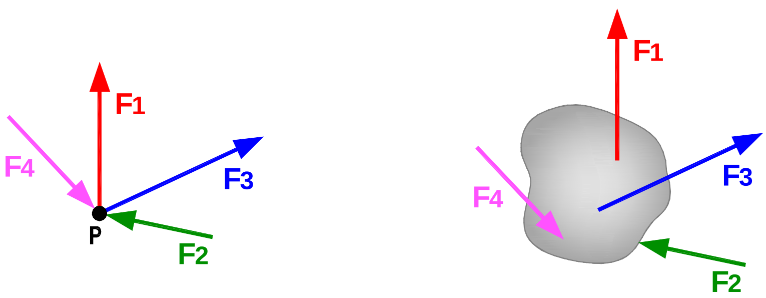


Figura 4

4- NOÇÃO DE MOMENTO

Consideremos um sistema de forças complanares aplicado a um corpo. Contrariamente ao que ocorre quando estamos perante um ponto material, as forças aplicadas a um corpo podem ter diferentes pontos de aplicação (ver *Figura 5*).



Ponto material Corpo rígido

Figura 5

O efeito de uma força num corpo rígido depende do seu ponto de aplicação. A força **F** aplicada no ponto **A** (ponto médio) do corpo livre da *Figura 6* provocará uma translação, enquanto a mesma força aplicada no ponto **B** provocará uma translação e uma rotação. A grandeza da rotação depende do ponto de aplicação da força.

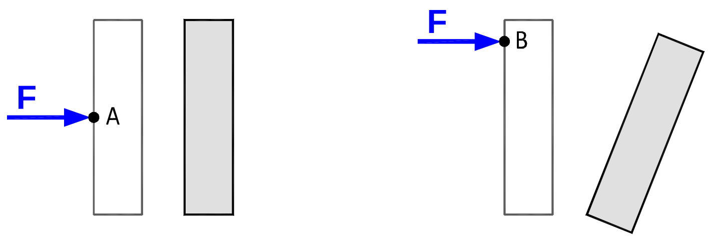


Figura 6

A tendência de uma força provocar uma rotação em torno de um ponto ou eixo é denominada **momento** de uma força em relação a um ponto ou eixo.

O **momento de uma força em relação a um ponto** é uma grandeza vectorial cuja intensidade é dada pelo produto da força pela distância medida na perpendicular ao ponto (ver Figura 7).

$$\boxed{|\mathbf{M_O}| = |\mathbf{F}| \times \mathbf{d}}$$

unidades: N.m ou kN.m

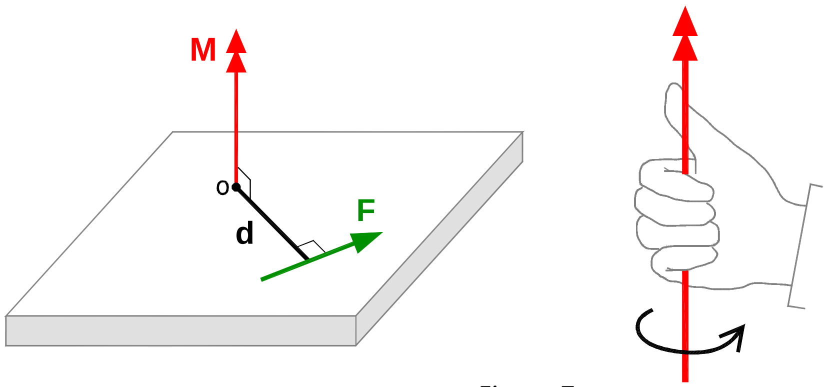


Figura 7

A **direcção** do vector que representa o momento de uma força em relação a um ponto é perpendicular ao plano definido pela força e pelo ponto.

O **sentido** do vector que representa o momento é o dado pela regra da mão direita (ver *Figura 7*).

Exemplo: Pretende-se fechar a porta representada na *Figura 8*. A aplicação da força **F** perpendicular à porta produz um movimento de rotação em torno do eixo da porta, ou seja, a força **F** introduz um momento **M**.

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathrm{d}$$

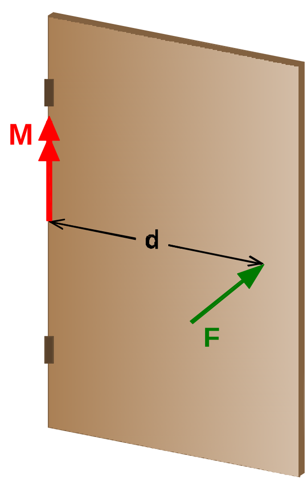


Figura 8

5- TEOREMA DE VARIGNON

O momento de várias forças concorrentes em relação a um ponto **O**, é igual ao momento da sua resultante em relação ao mesmo ponto **O**.

Exemplo de aplicação 1:

Considere o sistema de forças concorrentes em **P**, constiruido pelas forças **F1**, **F2** e **F3**, representado na *Figura 9*.

A resultante do sistema de forças é **R**, ou seja, **R** = **F1**+**F2**+**F3**.

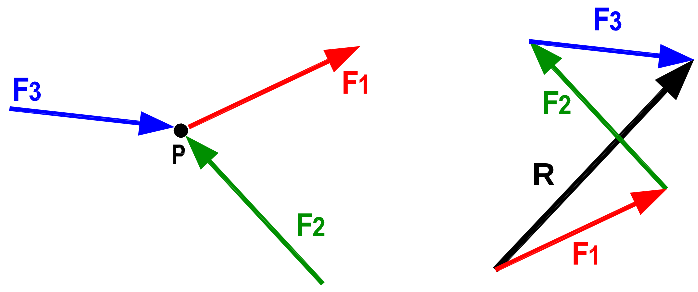


Figura 9

Considere como positivo o seguinte sentido de rotação:

Teorema de Varignon (ver *Figura 10*): $M_O^R = M_O^{F1} + M_O^{F2} + M_O^{F3} \quad \Rightarrow \quad R\times d = F1\times d1 - F2\times d2 + F3\times d3$

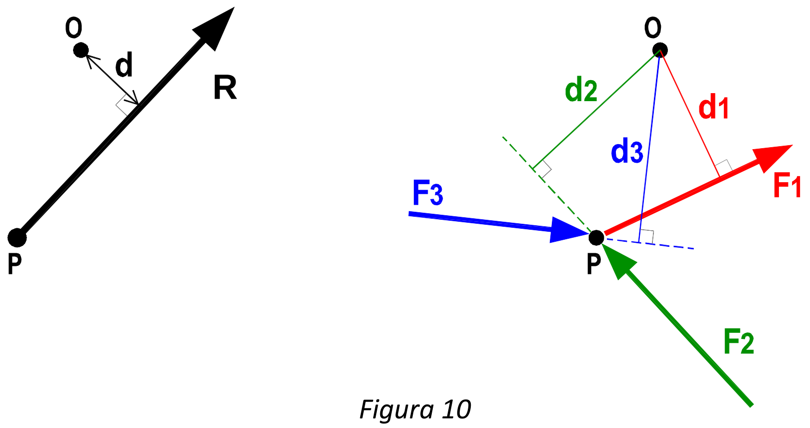


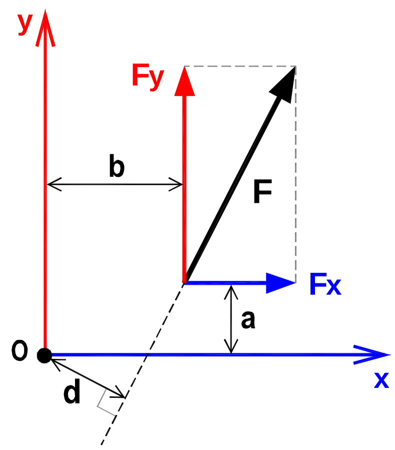
Figura 10

Exemplo de aplicação 2:

Considere a força **F** com componentes **Fx** e **Fy** segundo os eixos coordenados (ver *Figura 11*).

Aplicando o Teorema de Varignon:

$$M_O^F = M_O^{Fx} + M_O^{Fy} \quad \Rightarrow \quad F.d = -Fx.a + Fy.b$$



sentido positivo

Figura 11

6- NOÇÃO DE BINÁRIO DE FORÇAS

Um **binário** é um conjunto de duas forças com a mesma grandeza, direcções paralelas e sentidos contrários (ver *Figura 12*).

Forças com a mesma grandeza $\Rightarrow$ $|\mathbf{F1}| = |\mathbf{F2}| = \mathbf{F}$

Como as forças têm grandezas iguais e sentidos contrários, a força resultante do sistema é nula.

Aplicar um binário a um corpo rígido é equivalente a aplicar um momento de grandeza:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$$

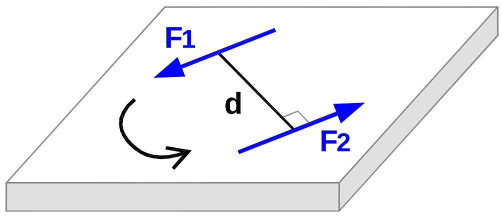


Figura 12

A distância **d** medida na perpendicular entre as duas forças chama-se **braço do binário**.

Exemplo:

Considere o binário representado na *Figura 13*, constituído por um par de forças com grandeza 10 kN que distam entre si 3 metros.

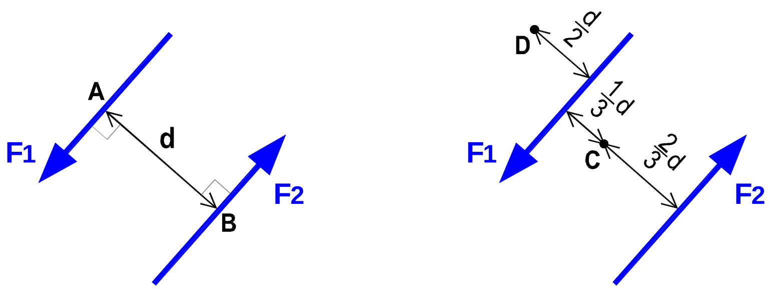


Figura 13

O binário poderá ser substituído por um momento **M** = 10 x 3 = 30 kNm. ↺

Qual o ponto de aplicação do vector que representa o momento?

Determinemos o momento do sistema de forças relativamente ao pontos A, B, C e D.

Momento em relação ao ponto **A**: $M_A = F2.d = 10 \times 3 = 30\,kNm$ ↺

Momento em relação ao ponto **B**: $M_B = F1.d = 10 \times 3 = 30\,kNm$ ↺

Momento em relação ao ponto **C**: $M_C = F1 \times \frac{1}{3}d + F2 \times \frac{2}{3}d = 10 \times 1 + 10 \times 2 = 30\ kNm$ ↺

Momento em relação ao ponto **D**: $M_D = -F1 \times \frac{d}{2} + F2 \times (d + \frac{d}{2}) = -10 \times \frac{3}{2} + 10 \times (3 + \frac{3}{2}) = 30\ kNm$ ↺

Conclusão:

O momento de um binário não depende do ponto onde é calculado.

O momento de um binário não depende do ponto de aplicação das forças que o constituem (desde que seja mantido o braço do binário, ou seja, que as forças que constituem o binário mantenham a distância entre si).

No estudo do equilíbrio externo de um corpo rígido, um binário pode ser substituído pelo momento **M = F x d**.

7- SISTEMAS DE FORÇAS EQUIVALENTES (caso bidimensional)

Um sistema de forças a actuar num corpo rígido poderá ser substituído por um sistema de forças equivalente, ou seja, por um sistema de forças que tem o mesmo efeito sobre o corpo.

Dois sistemas de forças dizem-se equivalentes se provocarem o mesmo movimento num corpo rígido, ou seja, se provocarem as mesmas translações e rotações.

Considere os sistemas de forças a actuar no corpo rígido representados na *Figura 14*.

O sistema constituído por **F1**, **F2**, **F3**, **F4** e **MF5** é equivalente ao sistema constituído por **Q1**, **Q2**, **Q3**, **MQ4** e **MQ5** pois o movimento provocado foi o mesmo, ou seja:

dx provocado pelo sistema **F** = **dx** provocado pelo sistema **Q**

dy provocado pelo sistema **F** = **dy** provocado pelo sistema **Q**

rotação **rz** provocada pelo sistema **F** = rotação **rz** provocada pelo sistema **Q**

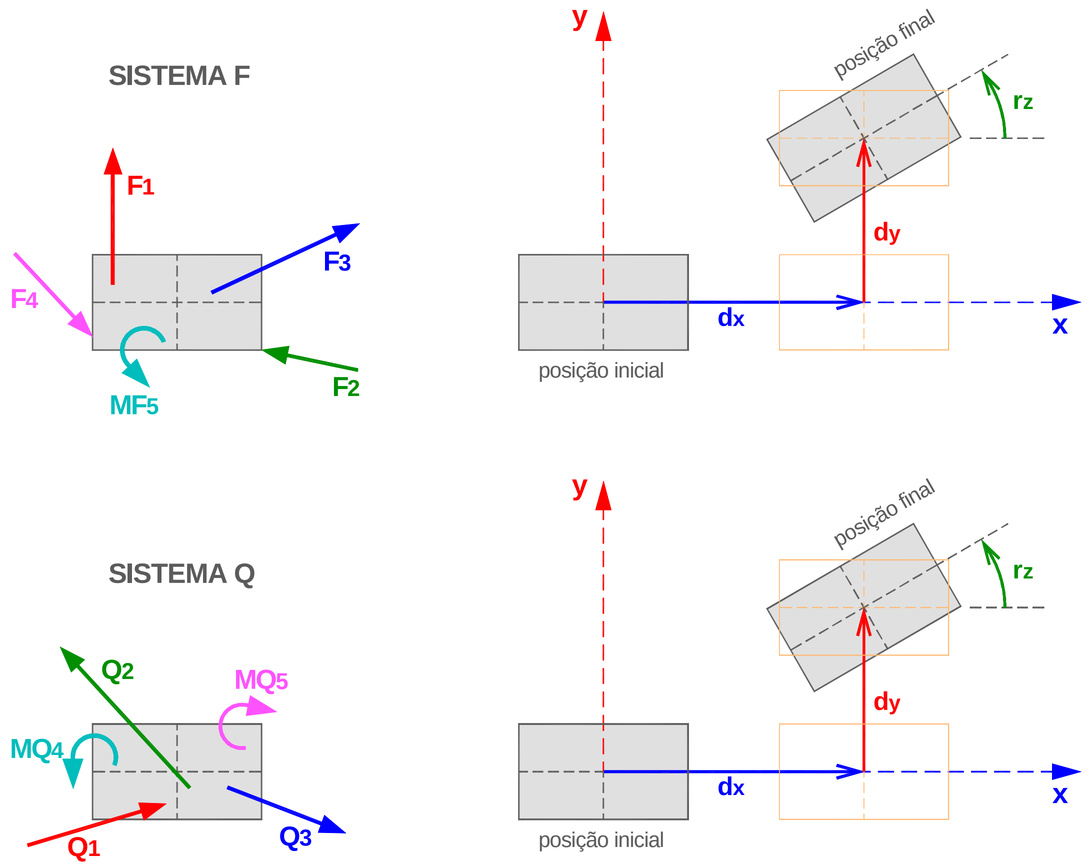


Figura 13

Para que o movimento de translação de um corpo rígido sob a acção de dois sistemas de forças seja igual é necessário que a resultante dos dois sistemas de forças também seja igual.

Para que a rotação de um corpo rígido em relação a um qualquer ponto **P** seja a mesma para dois sistemas de forças, é necessário que os momentos dos dois sistemas de forças em relação a esse ponto **P** também sejam iguais.

Se o sistema de forças **F** é equivalente ao sistema de forças **Q**:

$$\overline{R}_F = \overline{R}_Q \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_X = \sum Q_X \\ \sum F_Y = \sum Q_Y \end{cases}$$

$$\sum M_P^F = \sum M_P^Q$$

Exemplo

Considere os dois sistemas de forças representados na *Figura 14*. Verifique se o **sistema A** é equivalente ao **sistema B**.

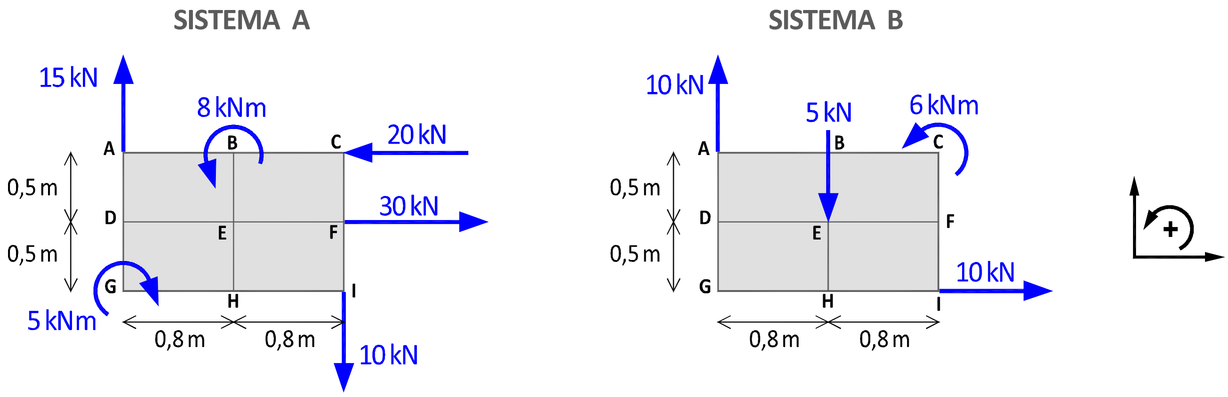


Figura 14

Sistema A	Sistema B
$\begin{cases} R_X = \sum F_X = -20+30 = 10 \text{ kN} \rightarrow \\ R_Y = \sum F_Y = 15-10 = 5 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$ Momentos no ponto **G**: $\sum M_G = -10\times1{,}6 - 30\times0{,}5 + 20\times1{,}0 + 8 - 5 = -8 \text{ kNm} \circlearrowright$	$\begin{cases} R_X = \sum F_X = 10 \text{ kN} \rightarrow \\ R_Y = \sum F_Y = 10-5 = 5 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$ Momentos no ponto **G**: $\sum M_G = -5\times0{,}8 + 6 = 2 \text{ kNm} \circlearrowleft$

Conclusão: Apesar de terem a mesma resultante, os sistemas de forças **A** e **B não são equivalentes** pois têm diferentes momentos em relação a um ponto (no presente caso, foi o ponto **G** a ser escolhido, mas poderia ter sido outro ponto qualquer).

8- REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS A UMA RESULTANTE E UM MOMENTO

Qualquer sistema de forças a actuar num corpo poderá ser substituído por outro sistema mais simples constituído somente por um **momento** e **uma força** a actuar num determinado ponto, ou seja, é sempre possível reduzir um sistema de forças a um **sistema força + momento**. Para isso bastará garantir que o sistema constituído por força + momento é equivalente ao sistema que se pretende substituir, tal como representado na *Figura 15*.

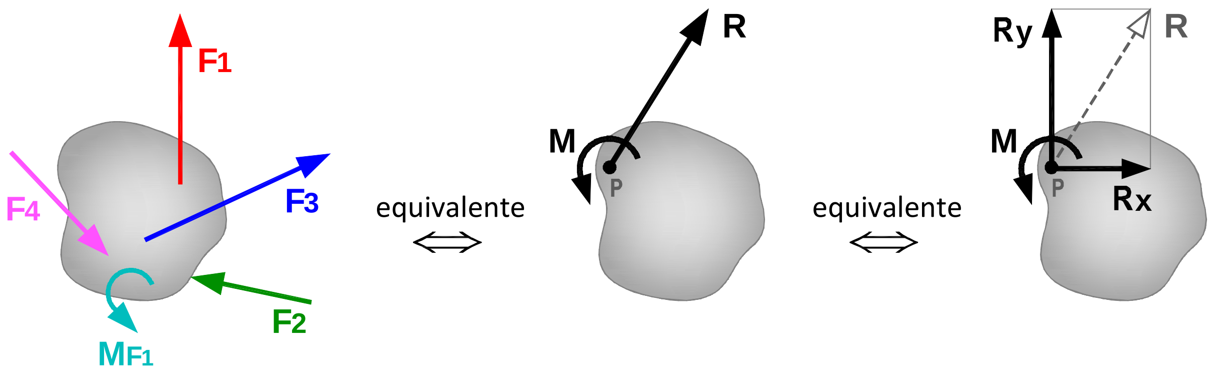


Figura 15

Se o sistema de forças **F** é equivalente ao sistema **R + M** com ponto de aplicaçao **P**:

$$\overline{R} = \sum F \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_X = \sum F_X^{sist.F} \\ R_Y = \sum F_Y^{sist.F} \end{cases}$$

$$\sum M_P^{R+M} = \sum M_P^{sist.F} \quad \Rightarrow \quad M = \sum M_P^{sist.F}$$

Exemplo

Substitua o **sistema B** da *Figura 16* por um sistema equivalente com ponto de aplicação em **D**, ou seja, reduza o **sistema B** a **um momento** e **uma resultante** com ponto de aplicação em **D**.

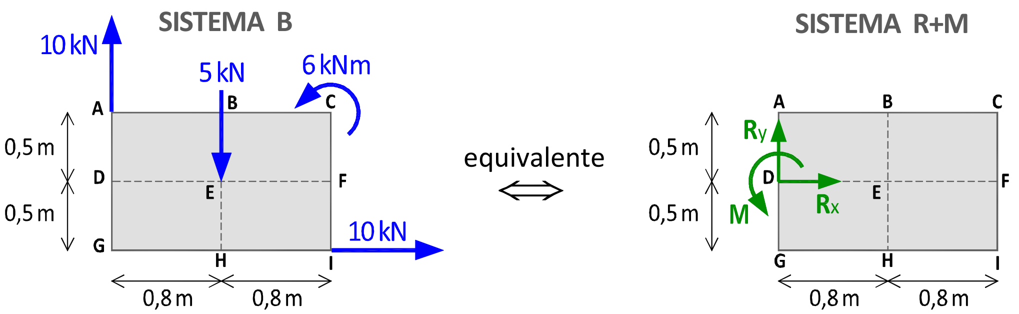
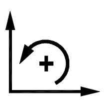


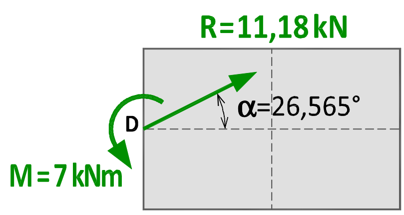
Figura 16

Sistema B equivalente a **Resultante + Momento** $\Rightarrow$

$$\begin{cases} R_X = \sum F_X^{sist.B} \\ R_Y = \sum F_Y^{sist.B} \\ M = \sum M_D^{sist.B} \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_X = \sum F_X^{sist.B} \\ R_Y = \sum F_Y^{sist.B} \\ M = \sum M_D^{sist.B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_X = 10 \text{ kN} \rightarrow \\ R_Y = 10 - 5 = 5 \text{ kN} \uparrow \\ M = 6 - 5 \times 0{,}8 + 10 \times 0{,}5 = 7 \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}18 \text{ kN} \nearrow \\ M = 7 \text{kNm} \circlearrowleft \end{cases}$$



9- REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS A UMA RESULTANTE

Qualquer sistema de forças a actuar num corpo poderá ser substituído por outro sistema constituído somente por **uma resultante** a actuar num **ponto Q** que terá que ser calculado para garantir a equivalência dos sistemas de forças. Tendo em conta o Princípio da Transmissibilidade, a resultante poderá actuar em qualquer ponto da sua linha de acção.

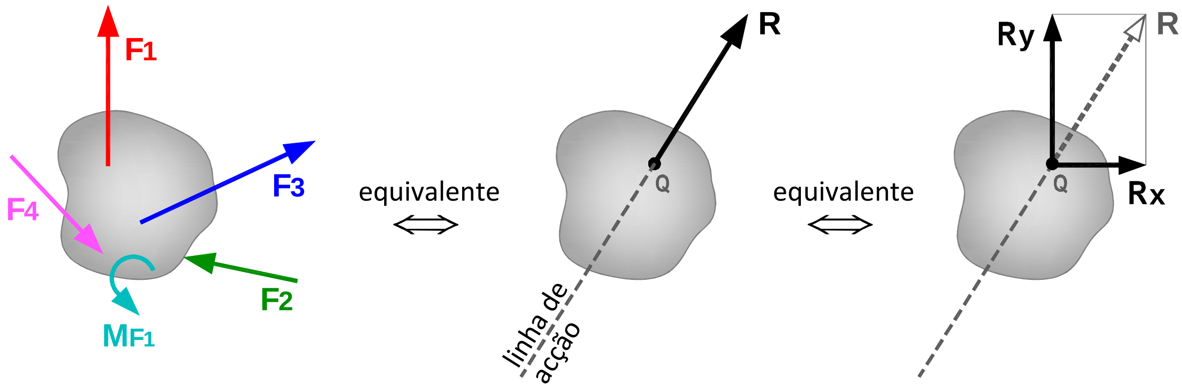


Figura 17

Para facilitar os cálculos, podemos começar por reduzir o sistema de forças a uma força+momento (ver *Figura 18*). Seguidamente vamos calcular a posição da linha de acção paralela a **R** que garanta que o sistema constituído somente pela **Resultante R** é equivalente ao sistema força+momento, ou seja:

$$\overline{R} = \sum F \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_X = \sum F_X^{sist.F} \\ R_Y = \sum F_Y^{sist.F} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$$

$$\sum M_Q^{R+M} = 0 \quad \Rightarrow \quad M - R \times d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{M}{R}$$

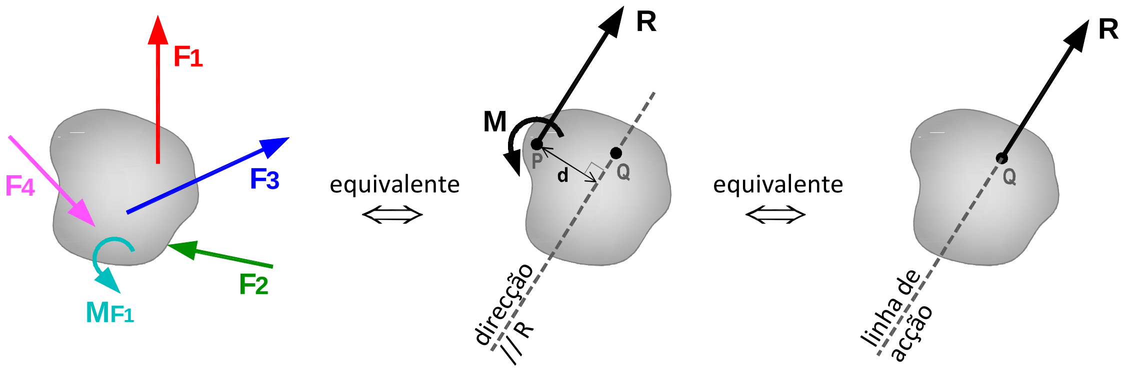


Figura 18

O sistema de forças poderá ser substituído pela **Resultante** a actuar em **Q** ou qualquer outro ponto sobre a linha de acção da Resultante (ver *Figura 18*).

Exemplo

Reduza o **sistema B** da *Figura 19* a uma resultante com ponto de aplicação sobre o alinhamento **DEF**.

No ponto anterior já tínhamos reduzido o **sistema de forças B** a uma **força+momento**, pelo que agora vamos utilizar este sistema mais simplificado (ver *Figura 19*).

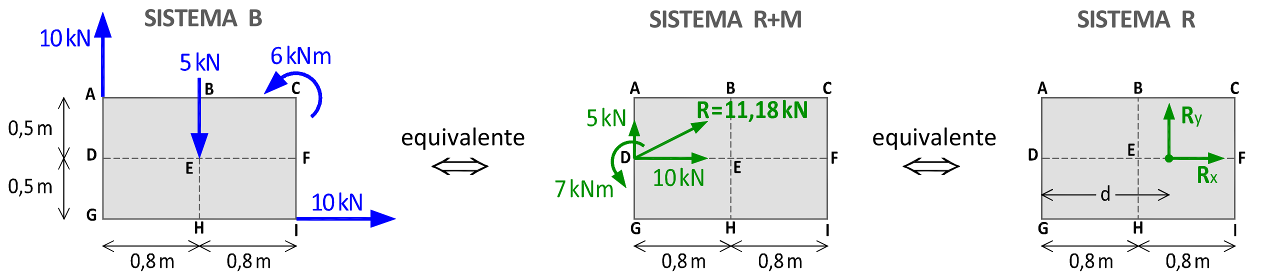
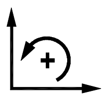
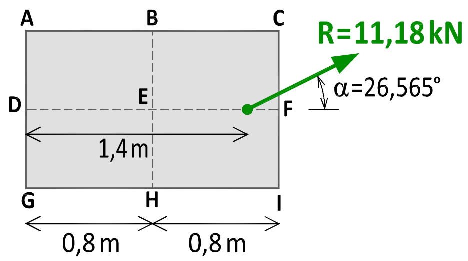


Figura 19



$$\begin{cases} R_X = \sum F_X^{R+M} \\ R_Y = \sum F_Y^{R+M} \\ \sum M_D^{sist.R} = \sum M_D^{sist.R+M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_X = 10 \text{ kN} \rightarrow \\ R_Y = 10 - 5 = 5 \text{ kN} \uparrow \\ R_X \times 0 + R_Y \times d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}18 \text{ kN} \nearrow \\ d = \frac{7}{5} = 1{,}4 \text{ m} \end{cases}$$



10- CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO (caso bidimensional)

Consideremos um corpo rígido em repouso a que vamos aplicar um sistema de forças. Após a aplicação das forças, o corpo rígido está em equilíbrio se se mantiver em repouso, ou seja, não sofra translações nem rotações.

Para que um corpo rígido sob a acção de um sistema de forças esteja em equilíbrio é necessário que:

- a resultante do sistema de forças a actuar no corpo rígido seja zero;
- o somatório dos momento do sistema de forças em relação a um qualquer ponto P seja zero.

Condição de equilíbrio de um corpo rígido: $\begin{cases} R = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_P = 0 \end{cases}$

Exemplo

Considere o corpo rígido representado na *Figura 15* sob a acção do carregamento aí ilustrado. Caracterize o momento e a força que deverá ser aplicada no ponto **H** para que, conjuntamente com o restante carregamento, o corpo rígido esteja em equilíbrio.

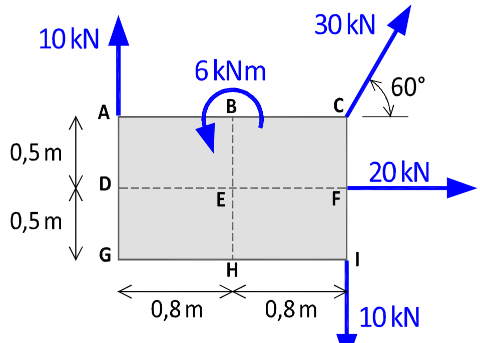
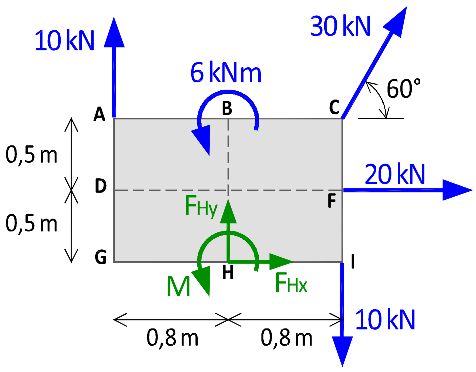
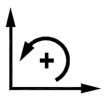


Figura 15





$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + 30\cos 60^\circ + F_{Hx} = 0 \\ 10 - 10 + 30\,\text{sen}\,60^\circ + F_{Hy} = 0 \\ 6 + M - 10\times 1{,}60 - 20\times 0{,}5 - 30\cos 60^\circ \times 1 + 30\,\text{sen}\,60^\circ \times 0{,}8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Hx} = -35\ \text{kN} \ \leftarrow \\ F_{Hy} = -25{,}981\ \text{kN} \ \downarrow \\ M = 14{,}215\ \text{kNm} \ \circlearrowleft \end{cases}$$